#توجيهي - 2007

تأسيس الرياضيات العلمي

تعلم الرياضيات بسهولة

إعداد:

د. خالد جلال

0799948198

الإقتران

مفهوم الاقتران

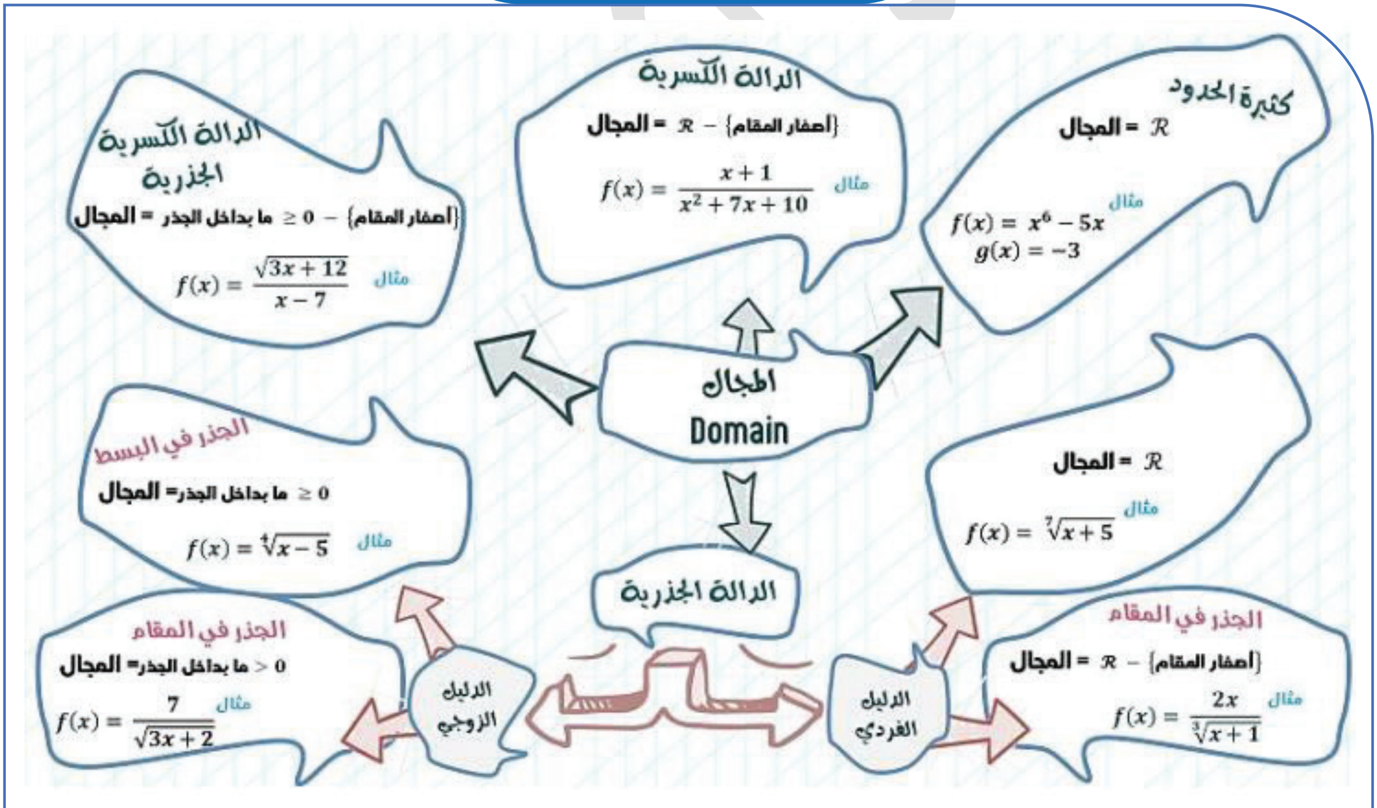
هو علاقة بين متغيرين x و y ، فيها لكل قيمة للمتغير x قيمة وحيدة للمتغير y ، و نعبر عنه رمزيا كما يلي :

$$y = f(x)$$

مجال الاقتران

هو مجموعة قيم x المسموح التعويض بها في الاقتران $f(x)$ ليكون الناتج عدد حقيقي

أنواع الاقترانات ومجال كل منها



ملاحظة هامة : كلمة دالة تعني أقتران

مجال العمليات على الاقترانات

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

مجال $f+g$ = مجال f ∩ مجال g

- $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

مجال $f-g$ = مجال f ∩ مجال g

- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

مجال $f \cdot g$ = مجال f ∩ مجال g

- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

مجال $\frac{f}{g}$ = مجال f ∩ مجال g - { أصفار المقام }

قوانين مهمه

1) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
2) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$
3) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$
4) $a^4 - b^4 = (a^2-b^2)(a^2+b^2) = (a-b)(a+b)(a^2+b^2)$
5) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
6) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

قوانين الأسس

1) $a^m \,.\, a^n = a^{m+n}$
2) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3) $(ab)^m = a^m\, b^m$
4) $(a^m)^n = a^{m\,n}$
5) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$
6) $a^0 = 1 \;, a \neq 0$
7) $a^1 = a$
8) $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$
9) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

قوانين اللوغاريتمات

تعريف اللوغاريتم : $y = \log_a x$ إذا و فقط إذا $x = a^y$ ، حيث $a > 0 \,,\ a \neq 1$.

1) $\log_a (x\,y) = \log_a x + \log_a y$

2) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

3) $\log_a x^n = n \log_a x$

4) $\log_a 1 = 0$

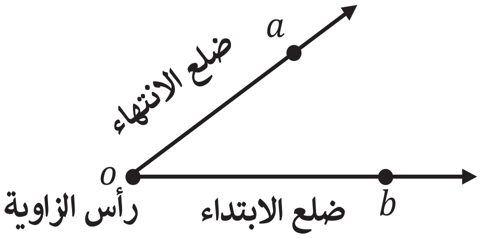
5) $\log_a a = 1$

6) $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$

الإقترانات المثلثية

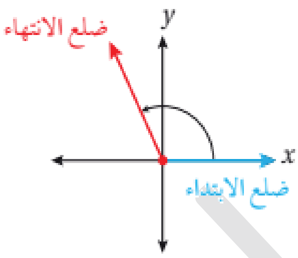
1 تعريف الزاوية

هي اتحاد شعاعين لهما نقطة بداية واحدة تسمى برأس الزاوية والشعاعان هما ضلعا الزاوية .
كما بالشكل المجاور :



2 الزاوية في الوضع القياسي

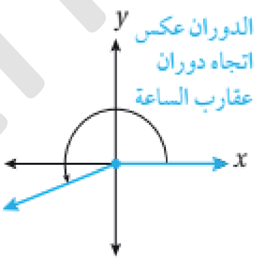
هي زاوية يقع رأسها عند نقطة الأصل (0 ، 0) ، وضلع أبتدائها منطبق على المحور x الموجب .
كما بالشكل المجاور :



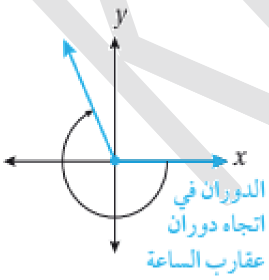
زاوية في الوضع القياسي

3 قياس الزاوية

قياس الزاوية : يصف مقدار الدوران و اتجاهه اللازمين للانتقال من ضلع الابتداء إلى ضلع الانتهاء
قياس الزاوية : يكون موجب إذا كان الدوران عكس اتجاه دوران عقارب الساعة ، و سالبا إذا كان الدوران في اتجاه دوران عقارب الساعة
كما بالاشكال المجاورة :



زاوية قياسها موجب

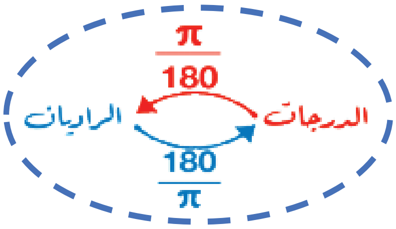


زاوية قياسها سالب

4 وحدات قياس الزاوية

- القياس الستيني للزاوية : وحدة قياسه هي الدرجة
- القياس الدائري للزاوية : وحدة قياسه هي الراديان
- للتحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان

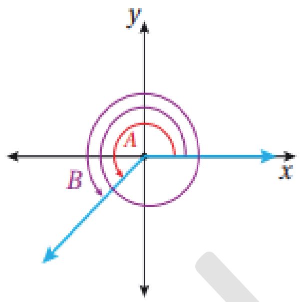
أو العكس لاحظ الشكل المجاور :



5 الزاويا المشتركة

يطلق على الزوايا بالوضع القياسي التي لها ضلع الأنتهاء نفسه ، لكن قياسها مختلف ، أسم الزوايا المشتركة .

في الشكل المجاور الزاويتين A ، B مختلفتين في القياس و لهما ضلع الأنتهاء نفسه فهما زاويتان مشتركتان .



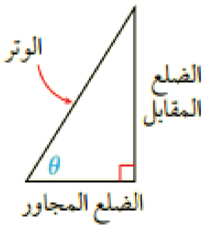
ملاحظة مهمه :

يُمكِن إيجاد زاوية مُشتركة في ضلع الانتهاء مع زاوية أُخرى عن طريق الجمع أو الطرح لأحد مضاعفات الزاوية $360°$ أو 2π

بالدرجات	بالراديان
إذا كانت θ تُمثِّل القياس بالدرجات لزاوية ما، فإنَّ جميع الزوايا ذات القياس $\theta + 360°n$ هي زوايا مشترِكة مع θ، حيث n عدد صحيح.	إذا كانت θ تُمثِّل القياس بالراديان لزاوية ما، فإنَّ جميع الزوايا ذات القياس $\theta + 2n\pi$ هي زوايا مُشترِكة مع θ، حيث n عدد صحيح.

6 الاقترانات الدائرية

إذا مثَّلَ θ قياس زاوية حادَّة في مثلث قائم الزاوية، فإنَّ الاقترانات المثلثية الستة تُعرَف بدلالة الوتر، والضلع المقابل، والضلع المجاور كما يأتي:



قاطع التمام (cosecant) $\csc\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$

الجيب (sine) $\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

القاطع (secant) $\sec\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$

جيب التمام (cosine) $\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

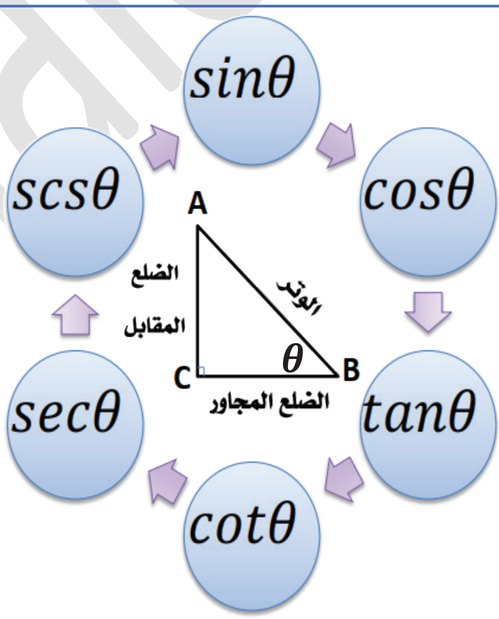
ظل التمام (cotangent) $\cot\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$

الظل (tangent) $\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

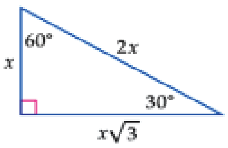
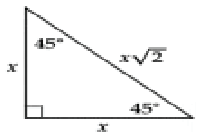
ملاحظة مهمه :

يُطلَق على اقترانات قاطع التمام، والقاطع، وظل التمام، اسم **اقترانات المقلوب** (reciprocal functions)؛ لأنَّها مقلوب نسب الجيب، وجيب التمام، والظل على الترتيب، ويُمكِن تعريفها على النحو الآتي:

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \quad , \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \quad , \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$



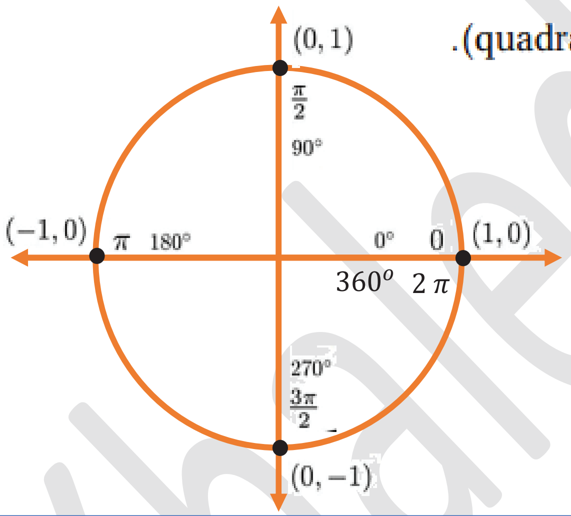
7 النسب المثلثية للزوايا الخاصة

الزاوية 60° و 30°		$\sin 30^{\circ} = \frac{1}{2}$	$\cos 30^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan 30^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
		$\sin 60^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 60^{\circ} = \frac{1}{2}$	$\tan 60^{\circ} = \sqrt{3}$
الزاوية 45°		$\sin 45^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 45^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\tan 45^{\circ} = 1$

8 النسب المثلثية للزوايا الربعية

إذا انطبق ضلع انتهاء الزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي على أحد المحورين الإحداثيين،

فإنَّ هذه الزاوية تُسمّى **زاوية ربعية** (quadrantal angle).



(x, y)

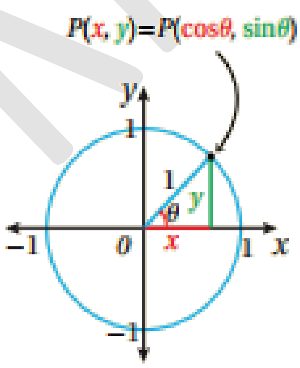
0° 0 ، 360^{o} 2π $\longrightarrow (1, 0)$

$\frac{\pi}{2}$ 90° $\longrightarrow (0, 1)$

π 180° $\longrightarrow (-1, 0)$

270° $\frac{3\pi}{2}$ $\longrightarrow (0, -1)$

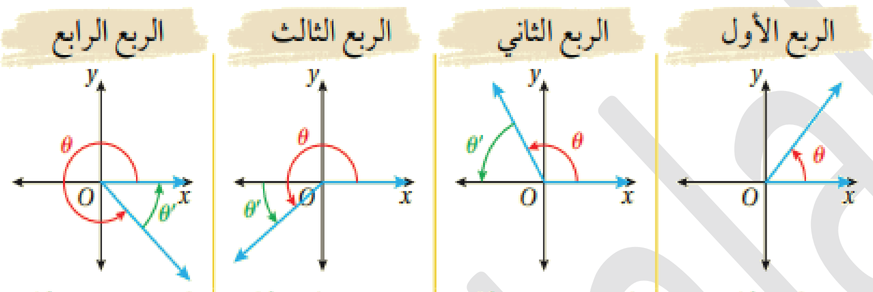
$\sin = y$ $\quad$ $\cos = x$ $\quad$ $\tan = \frac{y}{x}$



إذا رُسِمت الزاوية θ في الوضع القياسي، فإنَّ ضلع انتهائها يقطع دائرة الوحدة في نقطة وحيدة هي $P(x, y)$.

9 النسب المثلثية باستعمال الزوايا المرجعية

إذا كانت θ زاوية غير ربعية مرسومة في الوضع القياسي، فإنَّ **الزاوية المرجعية** (reference angle) للزاوية θ هي الزاوية الحادّة θ' المحصورة بين ضلع انتهاء الزاوية θ والمحور x. يُبيِّن الجدول الآتي العلاقة بين θ و θ' لأيِّ زاوية θ غير ربعية.



الربع الأول	الربع الثاني	الربع الثالث	الربع الرابع
$\theta' = \theta$	$\theta' = 180° - \theta$	$\theta' = \theta - 180°$	$\theta' = 360° - \theta$
	$\theta' = \pi - \theta$	$\theta' = \theta - \pi$	$\theta' = 2\pi - \theta$

تُستعمَل الزوايا المرجعية لإيجاد قيمة الاقترانات المثلثية لأيِّ زاوية θ، وتعتمد إشارة قيمة الاقتران المثلثي على الربع الذي يقع فيه ضلع انتهاء الزاوية θ.

أتّبع الخطوات الآتية لإيجاد قيمة الاقترانات المثلثية لأيِّ زاوية θ:

الخطوة 1: أجد قياس الزاوية المرجعية θ'.

الخطوة 2: أجد قيمة الاقتران المثلثي للزاوية المرجعية θ'.

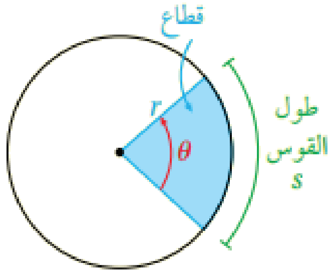
الخطوة 3: أستعمل الربع الذي يقع فيه ضلع انتهاء الزاوية θ، لتحديد إشارة قيمة الاقتران المثلثي للزاوية θ، مستعينًا بالمُخطَّط المجاور.

الربع الأول: جميع النسب موجبة+
الربع الثاني: sin و $cosec$ موجبة+ والبقية سالبة
الربع الثالث: tan و cot موجبة+ والبقية سالبة
الربع الرابع: cos و sec موجبة+ والبقية سالبة

10 طول القوس و مساحة القطاع

طول القوس

بالكلمات: طول القــوس s من الدائرة المقابل لزاوية مركزية قياســها θ بالراديان يســاوي ناتج ضــرب طول نصف القُطْر r في θ.



بالرموز: $s = r\theta$

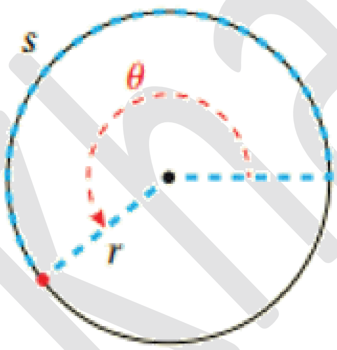
مساحة القطاع

بالكلمات: مســاحة القطاع A الذي قياس زاويته المركزيــة θ بالراديان في دائرة طول نصف قُطْرها r تســاوي نصف ناتج ضــرب مربع طول نصف القُطْر r في θ.

بالرموز: $A = \frac{1}{2} r^2 \theta$

11 الحركة الدائرية

إذا كانت نقطة ما تتحرك بسرعة ثابتة على محيط دائرة طول نصف قطرها r : كما بالشكل المجاور فإنه :



1) إذا كان s هو طول القوس الذي تقطعه النقطة في مدة زمنية مقدارها t ، فإن السرعة الخطية v لهذه النقطة تعطى بالعلاقة : $v = \frac{s}{t}$

2) إذا كانت θ هي زاوية الدوران (بالراديان) التي دارتها النقطة في مدة زمنية مقدارها t ، فإن السرعة الزاوية $\frac{d\theta}{dt}$ لهذه النقطة تعطى بالعلاقة : $\frac{d\theta}{dt} = \frac{\text{التغير في قياس الزاوية}}{\text{الزمن المنقضي}}$

3) في السؤال يقول مثلا أن عجل السيارة يدور بمعدل 10 دورات في الثانية فإن : $\frac{d\theta}{dt} = \frac{10 * 2\pi}{1\ s}$

4) من الحياة على سبيل المثال :

الليل و النهار و دوران الأرض حول محورها فإن : $\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\pi}{24\ h}$

دوران عقرب الساعات فإن : $\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\pi}{12\ h}$

دوران عقرب الدقائق فإن : $\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\pi}{60\ min}$

دوران عقرب الثواني فإن : $\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\pi}{60\ s}$

12 المتطابقات

المتطابقة : هي علاقة مساواة صحيحة لكل القيم .

متطابقات المقلوب :

$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$ $\qquad$ $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ $\qquad$ $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

المتطابقات النسبية :

$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ $\qquad$ $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

متطابقات فيثاغورث :

$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$ $\qquad$ $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$ $\qquad$ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

متطابقات الزاوية السالبة :

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$ $\qquad$ $\cos(-\theta) = \cos\theta$ $\qquad$ $\sin(-\theta) = -\sin\theta$

متطابقات المجموع :

$$\sin(a+b) = \sin a\ \cos b + \cos a\ \sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos a\ \cos b - \sin a\ \sin b$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\ \tan b}$$

متطابقات الفرق :

$$\sin(a-b) = \sin a \ \cos b - \cos a \ \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \ \cos b + \sin a \ \sin b$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1+\tan a \ \tan b}$$

متطابقات ضعف الزاوية :

صيغة الظل

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

صيغ جيب التمام

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$= 2\cos^2\theta - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2\theta$$

صيغة الجيب

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta \ \cos\theta$$

متطابقات تحويل الضرب إلى مجموع أو فرق :

$$\sin a \ \cos b = \frac{1}{2}\left(\sin(a-b) + \sin(a-b)\right)$$

$$\sin a \ \sin b = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)$$

$$\cos a \ \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$$

13 المعادلة المثلثية و حلها

- نسمي المعادلة التي تحوي اقترانات مثلثية معادلة مثلثية .
- المعادلة المثلثية الأساسية : هي معادلة في صورة $T(\theta) = c$ حيث $T(\theta)$ أقتران مثلثي ، c ثابت .
- لحل أي معادلة مثلثية يجب تبسيطها بحيث تصبح معادلة مثلثية أساسية .

حل المعادلات المثلثية الأساسية :

لحل المعادلة المثلثية الأساسية نتبع ما يلي :

- نجد الحل ضمن فترة واحدة
- نجد الحل العام بإضافة مضاعفات العدد 2π الصحيحة إلى الحل أو الحلول الناتجة .

1 حل المعادلات المثلثية الأساسية :

لحل معادلة مثلثية تحوي أقترانا مثلثيا واحدا نتبع ما يلي :

- نحول المعادلة المعطاة إلى معادلة مثلثية أساسية .
- نقوم بحل المعادلة الناتجة حسب خطوات حل المعادلة الاساسية .

مثال (1) : حل المعادلة : $\sin x = \frac{1}{2}$.

الحل : بالرجوع لدائرة الوحدة نجد أن : $\sin x = \frac{1}{2}$ في الربعين الأول و الثاني ، حيث يكون اقتران الجيب موجب . إذن : $x = \frac{5\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{6}$ (الحل الخاص)

إذن : $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ (الحل العام) حيث k عدد صحيح

2 حل معادلات مثلثية اقترانا مثلثيا واحد :

لحل معادلة مثلثية تحوي أقترانا مثلثيا واحدا نتبع ما يلي :

- نحول المعادلة المعطاة إلى معادلة مثلثية أساسية .
- نقوم بحل المعادلة الناتجة حسب خطوات حل المعادلة الاساسية .

مثال (2) : حل المعادلة : $3\sin x - 2 = 5\sin x - 1$

الحل : $-2\sin x - 2 = -1 \rightarrow -2\sin x = 1 \rightarrow \sin x = -\frac{1}{2}$

$$\rightarrow x = \frac{7\pi}{6} \ , \ x = \frac{11\pi}{6} \rightarrow x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k \ , \ x = \frac{11\pi}{6} + 2\pi k$$

حل المعادلات المثلثية بالتحليل :

◄ يمكن حل بعض المعادلات المثلثية بأستعمال التحليل ، مثل المعادلات في صورة معادلة تربيعية ، و المعادلات التي تتطلب أخراج عامل مشترك .

مثال (3) : حل المعادلة : $2sin^2 x - 3sin\, x + 1 = 0$ في الفترة $[0\,,2\pi)$

الحل : $(2sin\, x - 1)(sin\, x - 1) = 0 \rightarrow 2sin\, x - 1 = 0 \;,\; sin\, x - 1 = 0$

$\rightarrow sin\, x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{6} \;,\; x = \frac{5\pi}{6}$ ، $sin\, x = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

4 حل المعادلات المثلثية باستعمال المتطابقات :

◄ تحوي بعض المعادلات المثلثية أقترانا مثلثيا أو أكثر ، و لكن يتعذر فصل هذه الأقترانات بالتحليل ، لذا يمكن حلها بالمتطابقات المثلثية ، إضافة لبعض العمليات الجبرية ، مع ملاحظة أن الناتج قد لا يحقق المعادلة الأصلية لذ ا يجب التحقق من صحة الحل بالتعويض في المعادلة الأصلية .

مثال (4) : حل المعادلة : $2cos^2 x + 3sin\, x = 0$ في الفترة $[0\,,2\pi)$

الحل : $2(1 - sin^2 x) + 3sin\, x = 0 \rightarrow 2 - 2sin^2 x + 3sin\, x = 0$

$\rightarrow 2sin^2 x - 3sin\, x - 2 = 0 \rightarrow (2sin\, x + 1)(sin\, x - 2) = 0$

$\rightarrow 2sin\, x + 1 = 0$ ، $sin\, x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{7\pi}{6} \;,\; x = \frac{11\pi}{6}$

لاحظ أن المعادلة : $sin\, x - 2 = 0$ ليس لها حل لأن أكبر قيمة لاقتران الجيب 1

5 حل معادلات مثلثية تحوي اقترانات لضعف الزاوية :

◄ يمكن حل معادلة مثلثية تحوي أقترانا مثلثيا لضعف الزاوية ، بحل المعادلة لإيجاد النسبة المثلثية لضعف الزاوية أولا ، ثم إجراء عملية القسمة لإيجاد قياس الزاوية .

مثال (5) : حل المعادلة : $sin\, x \; cos\, x = -\frac{1}{2}$ في الفترة $[0\,,2\pi)$.

الحل : $2sin\, x \; cos\, x = -1 \rightarrow sin\, 2x = -1 \rightarrow 2x = \frac{3\pi}{2} \rightarrow 2x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$

$\rightarrow 2x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + \pi k \rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \;,\; x = \frac{7\pi}{4}$

❻ حل معادلات مثلثية تحوي اقترانات لنصف الزاوية :

◄ يمكن حل معادلة مثلثية تحوي أقترانا مثلثيا لنصف الزاوية ، بحل المعادلة لإيجاد النسبة المثلثية لنصف الزاوية أولا ، ثم إجراء عملية الضرب لإيجاد قياس الزاوية .

مثال (6) : حل المعادلة : $2sin\frac{x}{2}-\sqrt{3}=0$ في الفترة $[0\,,2\pi)$.

الحل : $2sin\frac{x}{2}=\sqrt{3} \rightarrow sin\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \frac{x}{2}=\frac{\pi}{3}\;,\;\frac{x}{2}=\frac{2\pi}{3} \rightarrow x=\frac{2\pi}{3}\;,\;x=\frac{4\pi}{3}$

تعلم الرياضيات كما ينبغي أن تكون
و
تكلم الرياضيات بطلاقة
مع
د.خالد جلال

المعادلات وحلها

حل المعادلات

الدرجة الأولى

$$9x + 1 = 7$$

$$3x + 2 = 5x + 3$$

$$4(6x + 5) = 8$$

$$\frac{3}{x+3} = 1$$

$$|x + 6| = 9$$

الدرجة الثانية

حدين: إما أن نأخذ الجذر التربيعي للطرفين أو بأخذ العامل المشترك

$$x^2 + 2x = 0$$

بأخذ x عامل مشترك

$$x[x + 2] = 0$$

$$x = 0$$

أو

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{4}$$

$$x = \pm 2$$

$$x^2 + 4 = 0$$

$$x^2 = -4$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{-4}$$

$$x = \pm\sqrt{-4} = \pm\sqrt{4}i$$

$$x = \pm 2i$$

٣حدود: التحليل ، إكمال المربع، القانون العام

$$x^2 + 12x + 32 = 0$$

بالتحليل نبحث عن عددين حاصل ضربهم 32 وجمعهم 12

$$(x + 4)(x + 8) = 0$$

$$x = -4\,, x = -8$$

بالقانون العام

$$x_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4(1)(32)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 128}}{2}$$

$$\frac{-12 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$= \frac{-12 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = \frac{-12 + 4}{2} = -4$$

$$x_2 = \frac{-12 - 4}{2} = -8$$